Part – 1: Scalars, Vectors and Introduction to Motion in Two Dimensions

Learning Objectives
इस भाग के अध्ययन के बाद आप:
- Plane Motion की अवधारणा समझ सकेंगे।
- Scalar एवं Vector राशियों में अंतर बता सकेंगे।
- Vector की विशेषताओं को समझ सकेंगे।
- Position Vector एवं Displacement Vector का अध्ययन करेंगे।
- Vector Representation सीखेंगे।

---

1. Introduction
पिछले अध्याय में हमने केवल **एक सीधी रेखा (One Dimension)** में गति का अध्ययन किया था।
वास्तविक जीवन में अधिकांश वस्तुएँ दो या तीन विमाओं में गति करती हैं।
उदाहरण:
- हवा में उड़ता पक्षी
- क्रिकेट की गेंद
- नदी में चलती नाव
- आकाश में उड़ता विमान
- सड़क पर मुड़ती हुई कार

इन सभी की गति **Plane Motion (Two Dimensional Motion)** कहलाती है।

---

2. Plane Motion
Definition
जब कोई वस्तु एक ही समतल (Plane) में दो परस्पर लम्बवत दिशाओं (x तथा y) में गति करती है, तो उसे **Motion in a Plane** कहते हैं।
Examples
- Projectile Motion
- Circular Motion
- Boat Crossing a River
- Motion of an Aeroplane

---

3. Scalar Quantities
Definition
वे भौतिक राशियाँ जिनमें केवल **परिमाण (Magnitude)** होता है, दिशा (Direction) नहीं होती, उन्हें **Scalar Quantities** कहते हैं।
Examples
- Distance
- Speed
- Time

- Mass
- Temperature
- Energy
- Work
- Power
- Density
- Volume

Characteristics

- केवल Magnitude होता है।
- साधारण बीजगणित (Algebra) से जोड़ी या घटाई जाती हैं।
- दिशा का कोई महत्व नहीं होता।

---

4. Vector Quantities

Definition

वे भौतिक राशियाँ जिनमें **परिमाण (Magnitude)** तथा **दिशा (Direction)** दोनों होते हैं, उन्हें **Vector Quantities** कहते हैं।

Examples

- Displacement
- Velocity
- Acceleration
- Force
- Momentum
- Weight
- Electric Field
- Magnetic Field

Characteristics

- Magnitude तथा Direction दोनों होते हैं।
- Vector Algebra के नियम लागू होते हैं।
- Arrow (→) द्वारा प्रदर्शित किए जाते हैं।

---

5. Difference Between Scalar and Vector

Scalar Quantity	Vector Quantity
Only magnitude	Magnitude and direction
Added by ordinary algebra	Added by vector algebra
Represented by a number	Represented by an arrow
Direction is not required	Direction is essential

---

6. Representation of a Vector

किसी Vector को एक Arrow द्वारा दर्शाया जाता है।

- Arrow की **Length** → Magnitude
- Arrow Head → Direction

यदि किसी Vector का नाम **A** है, तो उसे

$$\vec{A}$$

से प्रदर्शित करते हैं।
यदि उसका Magnitude लिखना हो:

$$|\vec{A}| \text{ or } A$$

---

7. Equal Vectors

दो Vectors समान कहलाते हैं यदि:

- उनका Magnitude समान हो।
- उनकी Direction समान हो।

---

8. Negative Vectors

यदि दो Vectors का Magnitude समान हो लेकिन Directions विपरीत हों, तो वे **Negative Vectors** कहलाते हैं।
उदाहरण:

$$\vec{A} = -\vec{B}$$

---

9. Zero (Null) Vector

जिस Vector का Magnitude शून्य हो, उसे **Zero Vector** कहते हैं।

$$\vec{0}$$

विशेषताएँ:

- Magnitude = 0
- Direction अनिश्चित (Undefined)

---

10. Unit Vector

जिस Vector का Magnitude **1** हो, उसे **Unit Vector** कहते हैं।
यदि किसी Vector
का Unit Vector निकालना हो,

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

Unit Vector केवल दिशा बताता है।

---

11. Standard Unit Vectors

Cartesian Co-ordinate System में:
Along X-axis

$$\hat{i}$$

Along Y-axis

$$\boxed{\hat{j}}$$

Along Z-axis

$$\boxed{\hat{k}}$$

इन तीनों का Magnitude:

$$|\breve{\imath}| = |\hat{\jmath}| = |\hat{k}| = 1$$

---

12. Position Vector

Origin से किसी बिंदु तक खींचा गया Vector **Position Vector** कहलाता है।
यदि किसी बिंदु के Coordinates हैं: (x, y), तो उसका Position Vector होगा:

$$\boxed{\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}}$$

---

13. Displacement Vector

यदि कोई वस्तु बिंदु A से B तक जाती है, तो

$$\boxed{\text{Displacement} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1}$$

जहाँ,

- $\vec{r}_1$= Initial Position Vector
- $\vec{r}_2$ = Final Position Vector

---

14. Important Solved Example

Example

A particle moves from (2,3) to (8,7). Find its displacement vector.

Solution

Initial Position: $\vec{r}_1 = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$
Final Position: $\vec{r}_2 = 8\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}$
Therefore,

$$\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (8\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}) - (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) = 6\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$$

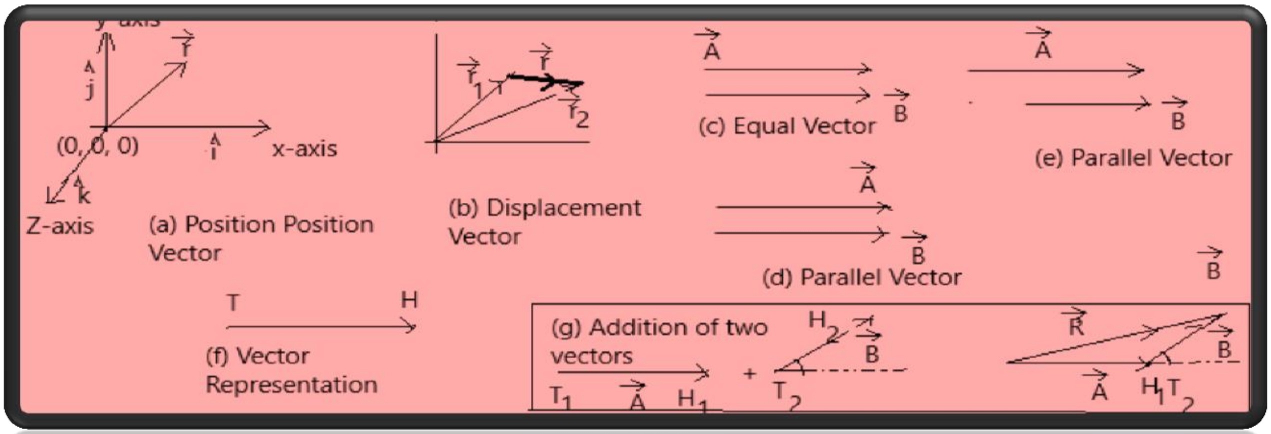
---

15. Important Points to Remember

□ Scalar quantities obey ordinary algebra.
□ Vector quantities obey vector algebra.
□ Unit Vector has magnitude **1** only.
□ Position Vector always starts from the Origin.
□ Displacement Vector is independent of the actual path.

---

16. Representation of Vectors (Addition, Position, Displacement etc.)



17. Exam Tips (★★★★★)

- हमेशा याद रखें कि **Distance** Scalar है जबकि **Displacement** Vector है।
- **Velocity, Acceleration, Force और Momentum** सभी Vector Quantities हैं।
- Unit Vector का **Magnitude सदैव 1** होता है; यह केवल दिशा बताता है।
- Position Vector को Origin से ही खींचा जाता है।

Part – 2: Addition, Subtraction and Product of two Vectors

Learning Objectives

इस भाग के अध्ययन के बाद आप:

- Vectors के Addition एवं Subtraction को समझ सकेंगे।
- Triangle Law एवं Parallelogram Law का प्रयोग कर सकेंगे।
- Resultant Vector का Magnitude एवं Direction ज्ञात कर सकेंगे।
- Vector Resolution की आवश्यकता को समझ सकेंगे।
- CBSE, NEET एवं JEE स्तर के प्रश्न हल कर सकेंगे।

---

1. Addition of Vectors

जब दो या दो से अधिक Vectors को जोड़कर एक नया Vector प्राप्त किया जाता है, तो उसे **Resultant Vector** कहते हैं। यदि $\vec{A}$ and $\vec{B}$ दो Vectors हैं, तो उनका योग:

$$\boxed{\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}}$$

---

2. Triangle Law of Vector Addition

Statement

यदि दो Vectors को क्रमशः त्रिभुज की दो भुजाओं द्वारा (Head-to-Tail) प्रदर्शित किया जाए, तो उनका योग त्रिभुज की तीसरी भुजा द्वारा प्रदर्शित होता है।

Construction

1. पहले $\vec{A}$ बनाइए।
2. $\vec{B}$ का Tail, $\vec{A}$ के Head पर रखिए।
3. $\vec{A}$ के Tail से $\vec{B}$ के Head तक खींचा गया Vector Resultant होगा।

---

3. Parallelogram Law of Vector Addition

Statement

यदि दो Vectors किसी समान बिंदु से प्रारम्भ होकर समांतर चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाओं द्वारा प्रदर्शित हों, तो उनका योग उस बिंदु से खींचा गया विकर्ण (Diagonal) होगा।

---

4. Magnitude of Resultant Vector

यदि दो Vectors $\vec{A}$ एवं $\vec{B}$ के बीच कोण θ हो, तो Resultant का Magnitude:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

---

5. Special Cases

(i) Same Direction ($\theta = 0^0$)

$$R = A + B$$

(ii) Opposite Direction ($\boldsymbol{\theta = 180^0}$)

$$R = A - B$$

(iii) Perpendicular Vectors ($\boldsymbol{\theta = 90^0}$)

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}$$

6. Direction of Resultant

यदि दो Vectors के बीच कोण θ हो, तो Resultant द्वारा $\vec{A}$ के साथ बनाया गया कोण ϕ:

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{B\sin\theta}{B\cos\theta + A}}$$

7. Subtraction of Vectors

Vector Subtraction को Negative Vector जोड़कर किया जाता है।

$$\boxed{\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})}$$

8. Resolution of a Vector

किसी Vector को दो परस्पर लम्बवत Components में विभाजित करना **Resolution of Vector** कहलाता है।

यदि Vector A, X-axis से θ कोण बनाता है, तो

Horizontal Component:

$$\boxed{A_x = A\cos\theta}$$

Vertical Component:

$$\boxed{A_y = A\sin\theta}$$

9. Rectangular Components

किसी Vector को लिखा जा सकता है:

$$\boxed{\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}}$$

जहाँ,

$$A_x = A\cos\theta \;\; and \; A_y = A\sin\theta$$

10. Magnitude from Components

यदि Components ज्ञात हों:

$$\boxed{A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}}$$

11. Direction from Components

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

12. Solved Example – 1

दो Vectors के Magnitudes: A= 6 and B = 8 और दोनों परस्पर लम्बवत हैं।
Resultant ज्ञात कीजिए।

Solution

$$\boldsymbol{R = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10}$$

13. Solved Example – 2

एक force vector ($\boxed{F}$) का Magnitude 20 N है तथा वह X-axis से 30^0 का कोण बनाता है।
Components ज्ञात कीजिए।

Solution

Horizontal Component:

$$F_x = F\cos 30^0 = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\, N$$

Vertical Component:

$$F_y = F\sin 30^0 = 20 \times \frac{1}{2} = 10\, N$$

14. Important Conceptual Questions

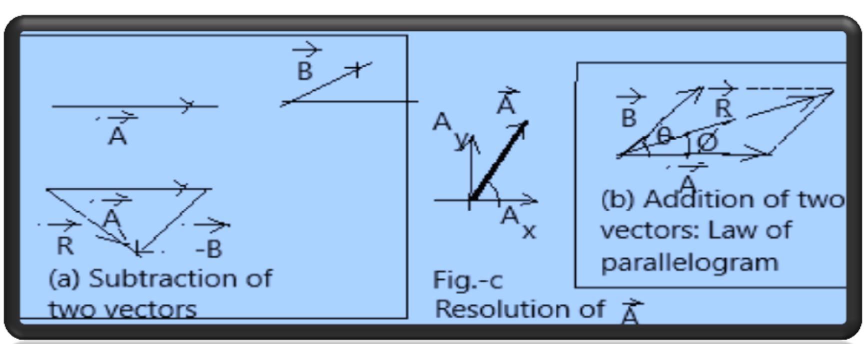
Q1. क्या दो असमान Magnitude वाले Vectors का Resultant शून्य हो सकता है?

Answer: नहीं। Resultant शून्य तभी होगा जब दोनों Vectors का Magnitude समान तथा Directions विपरीत हों।

Q2. क्या दो Vectors का Resultant किसी एक Vector के बराबर हो सकता है?

Answer: हाँ, विशेष परिस्थितियों में।

15. Diagram showing the subtraction, resolution and addition of two vectors



15. Solved Numerical Based on Vectors:

1. For what angle between $\vec{A}$ and $\vec{B}$, $|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}-\vec{B}|$?
   Solution:
   Let the angle be θ between $\vec{A}$ and $\vec{B}$.
   Since,
   $$|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}-\vec{B}| \; Or, \sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta} = \sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}$$
   Or,
   $$4AB\cos\theta = 0, Or, \cos\theta = 0, Or\ \theta = 90^0$$
   $$\boxed{Ans.\ \theta = 90^0}$$
2. Find the magnitude and direction cosines of the vector: $\vec{A} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}$
   Solution:
   Magnitude of vector A:
   $$|\vec{A}| = A = \sqrt{(3)^2+(-4)^2+(5)^2} = \sqrt{9+16+25} = 5\sqrt{2}$$
   $$\boxed{Ans.\ 5\sqrt{2}}$$
   Cosines of vector A:
   Since, the given vector A can be written as:
   $$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$
   Here,
   $$A_x = 3;\ A_y = -4;\ A_z = 5$$
   Now, the angles made by $\vec{A}$ from x-axis, y-axis and z-axis are as:
   $$\cos\theta_x = \frac{A_x}{A};\ \cos\theta_y = \frac{A_y}{A};\ \cos\theta_z = \frac{A_z}{A}$$
   Hence,
   $$\cos\theta_x = \frac{3}{5\sqrt{2}};\cos\theta_y = \frac{-4}{5\sqrt{2}};\cos\theta_z = \frac{5}{5\sqrt{2}}$$
3. Resolve a force F = 10 N alog x-axis and y-axis if $\vec{F}$ makes an angle of 60^0 from x-axis.
   Solution:
   $$F_x = F\cos\theta\ \ and\ F_y = F\sin\theta$$
   Or,
   $$F_x = (10)\cos 60^0 = (10)\left(\frac{1}{2}\right) = 5\ N$$
   And,
   $$F_y = (10)\sin 60^0 = (10)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5\sqrt{3}\ N$$

16. Dot Product of two vectors:

The The dot product of two vectors is a scalar quantity. It is also called scalar product. For example, work is a scalar quantity and it is the product of force and displacement as given by

$$W = \vec{F}\cdot\vec{s}$$

Let two vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are acting at a point, making angle θ with each other. Then,

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = AB\cos\theta}$$

Special cases:

(1) If two vectors are perpendicular to each other then their dot product is zero. $\theta = 90^0$, as $(\cos 90^0 = 0)$ and

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = 0}$$

(2) If two vectors are parallel to each other, then $\theta = 0^0$ as $(\cos 0^0 = 1)$ and

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB}$$

Angle between two vectors,

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

Properties of dot product of two vectors:

(1) The dot product of two vectors as,

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}}$$

(2) Unit vectors,

$$\boxed{\breve{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1}$$

And,

$$\boxed{\breve{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{\imath} = 0}$$

Projection of Vector $\vec{A}$ on vector $\vec{B}$ Or, Component of $\vec{A}$ along $\vec{B}$, it is given as,

$$\boxed{Component\ of\ \vec{A}\ along\ \vec{B} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|}}$$

17. Cross Product of two vectors:

The cross product of two vectors is a vector itself. It is also called Vector product. For example, torque is a vector quantity and it is the cross product of displacement and force, given as,

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$$

Another example, in circular motion, velocity is a vector quantity and it is the cross product of displacement and and angular velocity as,

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

If two vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are acting at a point and makes an angle θ from $\vec{A}$ to $\vec{B}$, then

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta\, \hat{n} = AB \sin\theta\, \hat{n} - - - (i)}$$

Taking magnitude of above equation both sides, we have

$$\boxed{|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin\theta - - - (ii)}$$

As, $|\hat{n}| = 1$

Unit Vecor perpendicular to both $\vec{A}$ and $\vec{B}$:

From above two equations (i) and (ii), we get,

$$\boxed{\breve{n} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}}$$

Special case:

(1) Two vectors are parallel if their cross product is zero. That is, when $\theta = 0^0$, then

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = 0}$$

(2) If the angle between two bectors is 90^0, then

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$$

Properties of Cross product of two vectors:

(3) The cross product of two vectors as,

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}}$$

(4) Unit vectors,

$$\boxed{\breve{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0}$$

And,

$$\boxed{\breve{\imath} \times \hat{\jmath} = \widehat{k;} \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath};\ \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}}$$

Also,

$$\boxed{\breve{\jmath} \times \hat{\imath} = -\widehat{k;} \hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath};\ \hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}}$$

18. Numerical Based on Dot product and Cross Product:

Numerical-1:

Find the angle between $\vec{A} = \hat{\imath} - \hat{\jmath}$ and $\vec{B} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

Solution:

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{(\hat{\imath}-\hat{\jmath})\cdot(\hat{\imath}+\hat{\jmath})}{\left(\sqrt{(1)^2+(-1)^2}\right)\left(\sqrt{(1) \quad + (1)}\right)} = \frac{1-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{0}{2} = 0 - -Ans.$$

Numerical-2:

Find a unit vector perpendicular to both $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \hat{k}$ and $\vec{B} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$

Solution:

$$[\vec{A}\times\vec{B}] = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(3+1) - \hat{\jmath}(2-1) + \hat{k}(-2-3) = 4\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 5\hat{k}$$

And,

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{(4)^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{42}$$

Therefore, unit vector perpendicular to both as

$$\hat{n} = \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \frac{4\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 5\hat{k}}{\sqrt{42}} \quad Answer$$

19. Exam Tips (★★★★★)

□ Triangle Law और Parallelogram Law की **Statement** + **Diagram** अवश्य याद रखें।

□ 90^0 वाले प्रश्नों में सीधे **Pythagoras Theorem** का प्रयोग करें।

□ Components निकालते समय:

- X-direction → **Cos**
- Y-direction → **Sin**

(यदि कोण X-axis से दिया गया हो।)

Part – 3: Position Vector, Motion in a Plane, Velocity and Acceleration in Two Dimensions

Learning Objectives

इस भाग के अध्ययन के बाद आप:

- Two-Dimensional Motion को Vector Form में समझ सकेंगे।
- Position Vector एवं Displacement Vector का उपयोग कर सकेंगे।
- Average एवं Instantaneous Velocity in Plane को समझ सकेंगे।
- Acceleration in Two Dimensions का अध्ययन करेंगे।
- Motion के Vector Equations का प्रयोग करना सीखेंगे।

---

1. Motion in Two Dimensions

जब कोई वस्तु **X-axis** तथा **Y-axis** दोनों दिशाओं में एक साथ गति करती है, तो उसे **Two-Dimensional Motion** या **Plane Motion** कहते हैं।

Examples

- Projectile Motion
- Circular Motion
- Boat Crossing a River
- Motion of an Aircraft

---

2. Cartesian Coordinate System

Two-dimensional motion को व्यक्त करने के लिए Cartesian Coordinate System का प्रयोग किया जाता है।

- Horizontal Axis → X-axis
- Vertical Axis → Y-axis
- दोनों अक्षों का प्रतिच्छेदन बिन्दु → Origin (O)

यदि किसी बिंदु P के Coordinates हों: (x, y) तो उसकी स्थिति पूर्णतः निर्धारित हो जाती है।

---

3. Position Vector

Origin से किसी बिंदु P तक खींचा गया Vector **Position Vector** कहलाता है।
यदि बिंदु P के Coordinates (x, y) हैं, तो

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

जहाँ,

- $\breve{\imath}$ → X-axis का Unit Vector
- $\hat{j}$ → Y-axis का Unit Vector

---

4. Magnitude of Position Vector

यदि $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ तो,

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

5. Displacement Vector

यदि कोई वस्तु बिंदु A से बिंदु B तक जाती है, तो उसका Displacement:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}$$

यदि $\vec{r}_1 = x_1\breve{\imath} + y_1\hat{\jmath}$ और $\vec{r}_2 = x_2\breve{\imath} + y_2\hat{\jmath}$ तो,

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$$

6. Average Velocity in a Plane

Average Velocity:

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

यह एक **Vector Quantity** है।
SI Unit: m/s

7. Instantaneous Velocity

किसी विशेष क्षण पर Velocity को **Instantaneous Velocity** कहते हैं।

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

If $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ then,

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}$$

Or,

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

8. Magnitude of Velocity

यदि Velocity के Components v_x *and* v_y हैं, then,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

9. Direction of Velocity

Velocity द्वारा X-axis के साथ बनाया गया कोण:

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

10. Average Acceleration

Acceleration = Velocity के परिवर्तन की दर

$$\vec{a}_{avg} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

11. Instantaneous Acceleration

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

यदि

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}$$

तो,

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j}$$

या,

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

12. Magnitude of Acceleration

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

13. Direction of Acceleration

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

14. Motion Equations in Vector Form

यदि Acceleration Constant है, तो

First Equation

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{a}t$$

Second Equation

$$\vec{s} = \vec{u}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

Third Equation

$$v^2 = u^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{s}$$

नोट: तीसरी Equation में Dot Product (Scalar Product) का प्रयोग होता है, जिसका विस्तृत अध्ययन आगे के अध्यायों में किया जाएगा।

---

15. Solved Example – 1

एक Particle की Position Vector है: $\vec{r} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$, Magnitude ज्ञात कीजिए।

Solution

$$|\vec{r}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

---

16. Solved Example – 2

यदि $v_x = 12\ m/s$ और $v_y = 5\ m/s$, तो Velocity का Magnitude ज्ञात कीजिए।

Solution

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13\ m/s$$

---

17. Important Conceptual Questions

Q1. क्या Position Vector और Displacement Vector समान होते हैं?

Answer:

नहीं।

Position Vector हमेशा Origin से मापा जाता है, जबकि Displacement दो Positions के बीच का अंतर होता है।

Q2. क्या Velocity के Components स्वतंत्र (Independent) होते हैं?

Answer:

हाँ।

X एवं Y दिशाओं में Motion एक-दूसरे से स्वतंत्र (Independent) होता है।

Q3. क्या दो-dimensional Motion को दो एक-dimensional Motions में विभाजित किया जा सकता है?

Answer:

हाँ।

यही सिद्धांत Projectile Motion एवं River Crossing Problems का आधार है।

---

18. Exam Tips (★★★★★)

- Position Vector हमेशा **Origin** से शुरू होता है।
- Magnitude निकालने के लिए **Pythagoras Theorem** का प्रयोग करें।
- Plane Motion में X तथा Y दिशाओं का विश्लेषण **अलग-अलग** करें।
- Velocity एवं Acceleration दोनों **Vector Quantities** हैं।

Part –4: Projectile Motion (Introduction, Equations and Trajectory)

यह Chapter 3 का सबसे महत्वपूर्ण भाग है। CBSE Board, NEET तथा JEE Main में Projectile Motion से लगभग प्रत्येक वर्ष प्रश्न पूछे जाते हैं।

Learning Objectives

इस भाग के अध्ययन के बाद आप:

- Projectile Motion की अवधारणा समझ सकेंगे।
- Horizontal एवं Vertical Motion का स्वतंत्र विश्लेषण कर सकेंगे।
- Time of Flight, Maximum Height एवं Horizontal Range के सूत्र व्युत्पन्न कर सकेंगे।
- Projectile की Trajectory का समीकरण समझ सकेंगे।
- Numerical Problems हल कर सकेंगे।

---

1. Projectile Motion

Definition

जब किसी वस्तु को क्षैतिज (Horizontal) से किसी कोण θ\thetaθ पर प्रारम्भिक वेग uuu के साथ फेंका जाता है तथा उसके बाद उस पर केवल **गुरुत्वाकर्षण बल (Gravity)** कार्य करता है, तो उसकी गति को **Projectile Motion** कहते हैं।

Examples

- क्रिकेट की गेंद
- फुटबॉल का किक
- भाला (Javelin) फेंकना
- तोप से छोड़ा गया गोला
- फव्वारे (Fountain) से निकलता जल

---

2. Assumptions of Projectile Motion

सरल विश्लेषण के लिए निम्न मान्यताएँ ली जाती हैं:

1. वायु प्रतिरोध (Air Resistance) नगण्य है।
2. गुरुत्वीय त्वरण g नियत है।
3. पृथ्वी की वक्रता की उपेक्षा की जाती है।
4. Motion केवल एक Vertical Plane में होता है।

---

3. Velocity Components

यदि प्रारम्भिक वेग u, Horizontal से θ कोण बनाता है, तो

Horizontal Component:

$$\boxed{u_x = u\cos\theta}$$

Vertical Component:

$$u_y = u\sin\theta$$

4. Motion along X-axis

Horizontal दिशा में कोई Acceleration नहीं होता।

$$a_x = 0$$

अतः,

Velocity:

$$v_x = u\cos\theta$$

Displacement:

$$s_x = u\cos\theta \times t$$

5. Motion along Y-axis

Vertical दिशा में Acceleration:

$$a_y = -g$$

Velocity:

$$v_y = u\sin\theta - gt$$

Displacement:

$$s_y = u\sin\theta \times t - \frac{1}{2}gt^2$$

6.Deriving Time of Flight,Maximum Height, Horizontal Range and Equation of Trajectory:

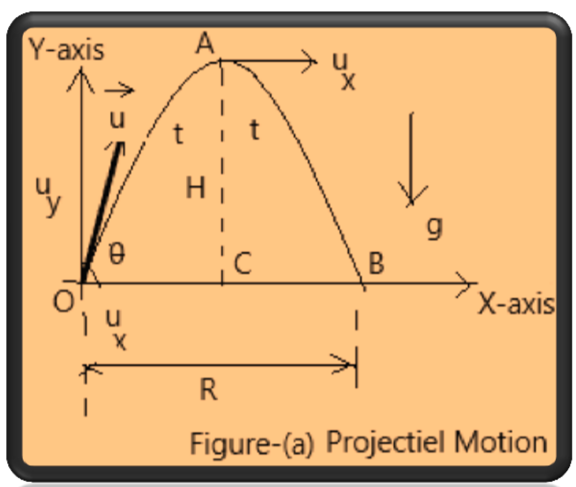


Figure-(a) Projectiel Motion

Since,

$$v_x = u_x + a_x t - - - (i)$$

$$v_y = u_y + a_y t - - - (ii)$$

$$s_x = u_x t + \frac{1}{2} a_x t^2 - - - (iii)$$

$$s_y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2 - - - (iv)$$

Also,

$$a_x = 0;\ a_y = -g;\ u_x = u\cos\theta\ ;\ u_y = u\sin\theta - - - -(v)$$

(a) Time of Flight

Projectile के पुनः भूमि पर आने में लगा कुल समय **Time of Flight** कहलाता है।

Derive it:

At the highest point vertical velocity $(v_y) = 0$. Let time taken to reach maximum height is t in first part and then to reach on ground from highest point to ground is also t because of symmetry.
Therefore, Time of Flight = 2 t = T
Using equation (ii) and (v) we have,

$$v_y = u_y + a_y t$$

We get,

$$0 = u\sin\theta - gt$$

Or,

$$t = \frac{u\sin\theta}{g} - - - (vi)$$

Hence, time of flight = $2 \times t$, so, Time of Flight is,

$$\boxed{T = \frac{2u\sin\theta}{g} = \frac{2u_y}{g} - - - (vii)}$$

Derived

(b) Maximum Height

Projectile द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई:

Derive it:

At the highest point, $H = s_y$
Using equation (iv) and (v) and (vi), we have

$$s_y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

Then,

$$H = u\sin\theta\left(\frac{u\sin\theta}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{u\sin\theta}{g}\right)^2$$

Or,

$$H = \frac{u^2 sin^2\theta}{g} - \frac{u^2 sin^2\theta}{2g} = \frac{u^2 sin^2\theta}{2g}$$

Hence, maximum height ism

$$H = \frac{u^2 sin^2\theta}{2g} = \frac{u_y{}^2}{2g} - - - (viii)$$

Derived

(c) Horizontal Range

Projectile द्वारा तय की गई कुल क्षैतिज दूरी:
Derive it:
Since $s_x = R$ as it is the horizontal distance from the point of throw to the point of fall.

Using equation (iii) and (v) and (vii), we have,

$$s_x = u_x t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Then,

$$R = (u \cos\theta) \times T = (u \cos\theta)\left(\frac{2u \sin\theta}{g}\right) = \frac{u^2(2 \sin\theta \cos\theta)}{g} = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$$

Hence, horizontal range is,

$$R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{2u_x u_y}{g} - - - (ix)$$

विशेष तथ्य

जब $\theta = 45^0$ तब

$$R_{max} = \frac{u^2}{g}$$

(d) Equation of Trajectory

Projectile का पथ (Trajectory) परवलय (Parabola) होता है।
Trajectory का समीकरण:

Derive the equation of Trajectory which is a parabole-

Let $s_x = x$ and $s_y = y$, then using equation (iii), (iv) and (v), we have,

$$s_x = u_x t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Then,

$$x = u \cos\theta \times t$$

Or,

$$t = \frac{x}{u \cos\theta} - - - (x)$$

Now,

$$s_y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2 - - - (xi)$$

Putting the value of t from equation (x) and $s_y = y$, we get from equation (xi) as

$$y = (u\,sin\,\theta)\left(\frac{x}{u\cos\theta}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{u\cos\theta}\right)^2$$

Or,

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2cos^2\theta} - - - - (xii)$$

Or,

$$\boxed{y = x\tan\theta\left(1 - \frac{x}{R}\right)}$$

Derived

निष्कर्ष: Projectile का Path सदैव **Parabolic** होता है।

7. Angle for Maximum Range

Maximum Range प्राप्त होती है जब

$$\boxed{\theta = 45^0}$$

8. Complementary Angles

यदि $\theta_1 + \theta_2 = 90^0$ तो

$$\boxed{R_\theta = R_{90^0-\theta}}$$

अर्थात Complementary Angles पर समान प्रारम्भिक वेग के लिए Horizontal Range समान होती है।

9. Solved Examples

Examples-1

एक गेंद को u = 20 m/s की गति से 30^0 के कोण पर फेंका जाता है। g =10 m/s^2, what is the time of flight?

Solution

$$T = \frac{2u\sin\theta}{g} = \frac{40 \times \frac{1}{2}}{10} = 2\,s$$

Example – 2

उपरोक्त प्रश्न में Maximum Height ज्ञात कीजिए।

Solution

$$H = \frac{u^2sin^2\theta}{2g} = \frac{400 \times \frac{1}{4}}{2 \times 10} = 5\,m$$

Example–3

यदि u = 20 m/s और θ = 45^0 तो Horizontal Range ज्ञात करें। g =10 m/s^2

Solution

$$R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{400 \times 1}{10} = 40\ m$$

---

10. Important Conceptual Questions

Q1. Projectile Motion में Horizontal Acceleration कितना होता है?

Answer:zero

Q2. Vertical Acceleration कितना होता है?

Answer: -g

Q3. किस कोण पर Maximum Range प्राप्त होती है?

Answer: 45^0

Q4. क्या Projectile का Path Circular होता है?

Answer: नहीं। यह **Parabolic** होता है।

Q5. Complementary Angles पर Range समान क्यों होती है?

क्योंकि, $\sin 2\theta = \sin(180^0 - 2\theta)$
अतः दोनों स्थितियों में Range समान होती है।

---

11. Exam Tips (★★★★★)

- Horizontal Motion और Vertical Motion का विश्लेषण **अलग-अलग** करें।
- Horizontal Velocity **सदैव स्थिर** रहती है।
- Vertical Velocity समय के साथ बदलती है।
- Maximum Height पर केवल Vertical Velocity शून्य होती है, Horizontal Velocity नहीं।
- 45^0 पर Range अधिकतम होती है।

Part – 5: Uniform Circular Motion

यह भाग CBSE Board, NEET एवं JEE Main के लिए अत्यंत महत्वपूर्ण है। विशेष रूप से **Uniform Circular Motion** से नियमित रूप से प्रश्न पूछे जाते हैं।

Learning Objectives

इस भाग के अध्ययन के बाद आप:

- Uniform Circular Motion (UCM) की अवधारणा समझ सकेंगे।
- Angular Displacement, Angular Velocity तथा Time Period का अध्ययन करेंगे।
- Centripetal Acceleration की आवश्यकता एवं दिशा समझ सकेंगे।

---

1. Uniform Circular Motion (UCM)

Definition

जब कोई वस्तु **वृत्ताकार पथ (Circular Path)** पर **समान चाल (Constant Speed)** से गति करती है, तो उसकी गति को **Uniform Circular Motion** कहते हैं।

Examples

- धागे से बँधा हुआ घूमता पत्थर
- पंखे (Fan) के ब्लेड का घूमना
- पृथ्वी के चारों ओर घूमता उपग्रह (सरलीकृत स्थिति)
- घड़ी की सुइयाँ

---

2. Characteristics of UCM

- Path वृत्ताकार होता है।
- Speed नियत रहती है।
- Velocity का **Magnitude** समान रहता है, पर **Direction** निरंतर बदलती है।
- इसलिए वस्तु का **Acceleration शून्य नहीं होता।**

---

3. Circular Motion Diagrams:

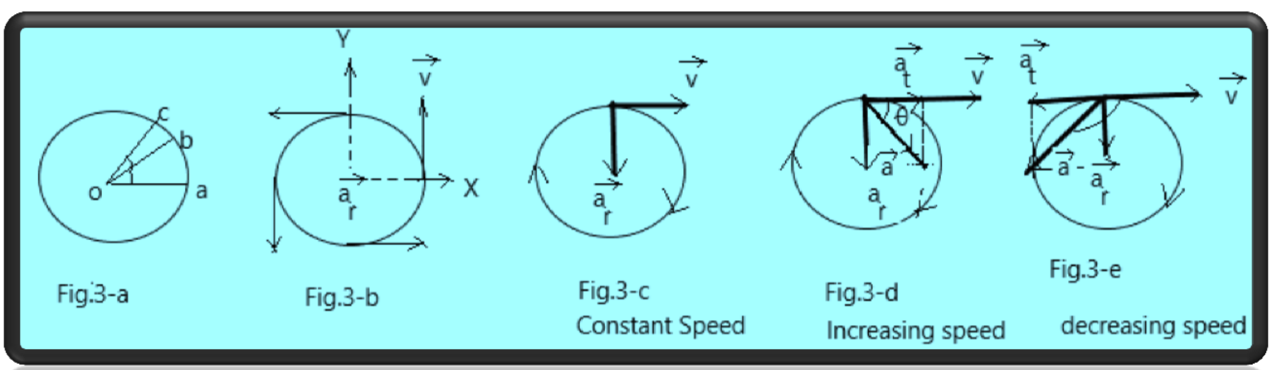


Fig.3-a | Fig.3-b | Fig.3-c Constant Speed | Fig.3-d Increasing speed | Fig.3-e decreasing speed

4. Important Definitions:

In circular motion, a particle has two velocities.

(a) Angular velocity
(b) Linear velocity

Angular Velocity (ω)

Angular Displacement की समय के सापेक्ष परिवर्तन दर:

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$$

SI Unit: rad/s

Angular Displacement (θ)

वृत्त के केन्द्र पर बना कोण **Angular Displacement** कहलाता है।
SI Unit: radian

---

5. Relation between Linear and Angular Velocity

Since,

$$ds = r d\theta$$

Or,

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

Or,

$$v = r\omega$$

In vector form,

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

---

6. Time Period (T)

एक पूर्ण चक्कर लगाने में लगा समय:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

---

7. Frequency (f)

प्रति सेकंड लगाए गए चक्करों की संख्या:

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

और

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$

---

8. Acceleration (a)

A particle in circular motion has two accelerations.

(a) Angular acceleration
(b) Linear Acceleration

Angular Acceleration(α):

The time rate of change in angular velocity is called angular acceleration.

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}}$$

- It is a vector quantity.
- Direction of angular acceleration is perpendicular to the plane of circle and it is either parallel or antiparallel to the angular velocity.
- If $\alpha \; and \; \omega$ are parallel to each other, speed of the particle increases.
- If $\alpha \; and \; \omega$ are anti-parallel to each other, speed of the particle decreases

Linear Acceleration(a):

It has two components:

(a) Centripetal acceleration and
(b) Tangential acceleration

Centripetal Acceleration Or Radial Acceleration

Uniform Circular Motion में त्वरण सदैव केन्द्र की ओर होता है।

$$\boxed{a_c \; Or \; a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2}$$

विशेषताएँ

- दिशा सदैव केन्द्र की ओर।
- Magnitude स्थिर रह सकता है।
- Direction लगातार बदलती रहती है।

Tangential Acceleration(a_t):

It is defined as rate of change in speed.

$$\boxed{a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}}$$

This tangential component is responsible for change in speed in circular motion.

- If a_t is zero, no change in speed.
- If tangential acceleration and linear velocity both are in same direction, speed increases.
- If both are in opposite direction, speed decreases.

Relation between tangential acceleration, angular acceleration and radius of the circle:

Since,

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\left(\frac{v}{r}\right)}{dt} = \frac{1}{r}\left(\frac{dv}{dt}\right) = \frac{a_t}{r}$$

Or,

$$\boxed{a_t = r\alpha}$$

Net Acceleration

$$\boxed{a = \sqrt{{a_c}^2 + {a_t}^2}}$$

The direction of net acceleration from a_t,

$$\tan\theta = \frac{a_c}{a_t}$$

---

9. Numerical

Numerical-1:

A particle is moving in a circle of radius 1 m at uniformly increasing speed. Calculate the angular acceleration of the particle if its speed changes from 2 m/sto 3 m/s in 2 s.

Solution:

Since,

$$a_t = r\alpha$$

Or,

$$\frac{dv}{dt} = r\alpha$$

Or,

$$\alpha = \frac{1}{1}\left(\frac{3-2}{2}\right)0.5\, rad\ s^{-2} - - - - - Ans.$$

Numerical-2:

The speed of a particle varies with time as: $v = 2t$.The particle is moving on a circula path of radius 1 m. Find the followings at t = 1 s.

(a) radial acceleration
(b) tangential acceleration and
(c) net acceleration

Solution:

(a) Radial acceleration,

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

At t = 1 s, r = 1 m, $v = 2 \times 1 = 2\ m/s$, then

$$a_r = \frac{4}{1} = 4\ ms^{-2} - - - -Ans.$$

(b) Tangential acceleration,

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(2t)}{dt} = 2\ ms^{-2} - - - Ans.$$

(c) Net acceleration,

$$a = \sqrt{{a_r}^2 + {a_t}^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}\ ms^{-2} - - - -Ans.$$

10. Why is Acceleration Present in UCM?

यद्यपि Speed नियत रहती है, लेकिन Velocity की दिशा निरंतर बदलती रहती है।

क्योंकि Acceleration, Velocity के परिवर्तन की दर है, इसलिए:

$$\boxed{a \neq 0}$$

---

11. Solved Examples

Example – 1
एक कण 5 m त्रिज्या वाले वृत्त पर 10 m/s की चाल से घूम रहा है।
Centripetal Acceleration ज्ञात कीजिए।
Solution

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{100}{5} = 20\ ms^{-2}$$

Example – 2
एक चक्र का Angular Velocity 4π rad/s है। Time Period ज्ञात कीजिए।
Solution

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = 0.5\ s$$

---

12. Important Conceptual Questions

Q1. क्या Uniform Circular Motion में Acceleration शून्य होता है?
Answer: नहीं। त्वरण सदैव केन्द्र की ओर होता है।

Q2. Centripetal Acceleration की दिशा क्या होती है?
Answer: सदैव वृत्त के केन्द्र की ओर।

Q3. क्या Speed और Velocity दोनों समान रहते हैं?
Answer: Speed समान रहती है, Velocity की दिशा बदलती रहती है।

Q4. Angular Velocity का SI Unit क्या है?
Answer: rad/s

---

13. Exam Tips (★★★★★)
- UCM में **Speed स्थिर** रहती है, पर **Velocity बदलती रहती है।**
- Centripetal Acceleration सदैव **केन्द्र की ओर** होती है।
- v = rω अत्यंत महत्वपूर्ण सूत्र हैं।